***Выступление на РМО учителей математики
(ноябрь 2011 года)***

**Ильина Ольга Игоревна**

***( МОУ «Гимназия № 24»)***

**Тема: «*Решение задач с параметрами*»**

В «Концепции модернизации российского образования на период до 2012 года» содержатся следующие положения:

 «Роль математической подготовки в становлении современного человека определяет следующие цели школьного математического образования:

 – приобретение конкретных математических знаний, необходимых для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;

 – интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценной жизни в обществе;

 – формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

 – формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии человеческой цивилизации и современного общества

 Порядок перечисления этих целей не определяет их иерархии, все они рассматриваются как одинаково значимые для формирования личности в процессе освоения математики».

 Роль образования для развития творческих способностей личности неоценима. Особенно важна роль математики для развития творческого потенциала человека. «И так же, как каждому разумному человеку должна быть понятна роль физкультуры для здоровья и гармонического развития тела, всеми нами должна быть осознанна особая роль тренировки и гармоничного развития наших мыслительных способностей, нашего мозга. Но за всю историю человечества пока не найдено лучшего способа развития интеллектуальных и творческих способностей человека, чем при помощи математики»

 Важнейшим средством формирования у школьников высокой математической культуры, активизации обучения математике является эффективная организация и управление учебной деятельностью в процессе решения различных математических задач.

 Существующая ныне система математических задач не отвечает в полном объёме современным требованиям. Теория и практика методики обучения математике показывают, что учащемуся недостаточно знать лишь предметное содержание математического факта для его полноценного усвоения. Требуется ещё уметь видеть и понимать способы организации этого содержания, логическую структуру изучаемого, его место в общей системе математических знаний. Но для этого необходимо найти инструмент, позволяющий выработать у учащегося современный системный тип мышления, отвечающий настоящему этапу развития общества.

 Задачи с параметрами представляют собой именно такой инструмент для реализации современных целей математического и не только математического образования учащихся. Содержательно – методическая линия задач с параметрами прямо нацелена на формирование исследовательских способностей, элементов математического творчества учащихся, реализацию задач развивающего образования, необходимого подрастающему поколению.

 Глубокая, богатая идеями и методами – содержательно-методическая линия задач с параметрами как нельзя лучше позволит развить активную творческую деятельность учащегося, его системное мышление, подготовить его к решению действительно творческих задач, которые со временем перед ним поставит сама жизнь. Глубина идей решения позволит системно выявлять категорию учащихся, которые в дальнейшем могут связать свою жизнь с точными науками. Однако и для других учащихся участие в решении задач с параметрами даст возможность занимать активную творческую позицию. Наиболее высокая форма синтеза знаний реализуется в виде наук о самых общих свойствах природы. К числу таких наук относится, в первую очередь, философия, которая выявляет и отражает общие свойства существования материи. Поэтому идеи, методы и подходы, привносимые содержательно-методической линией задач с параметрами, могут быть ещё в большей степени полезны «гуманитариям», нежели «технарям».

 Однако само по себе решение задач с параметрами – не самоцель, а только средство.

Не секрет, что именно при решении математических задач школьники сознательно и прочно овладевают системой математических знаний. Задачи с параметрами, нацеленные на формирование элементов математического творчества, исследовательских способностей учащихся, будут, более чем что-либо служить развитию системного мышления учащихся.

Цель обучения была сформулирована ещё знаменитым математиком и педагогом Д. Пойа: «Цель обучения – научить молодёжь думать».

Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников, но их решение вызывает у них значительные затруднения. Это связано с тем, что каждое уравнение или неравенство с параметрами представляет собой целый класс обычных уравнений и неравенств, для каждого из которых должно быть получено решение.

Если в уравнении или неравенстве некоторые коэффициенты заданны не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются параметрами, а уравнение или неравенство параметрическим.

И сейчас я хочу предложить вашему вниманию несколько задач с параметрами по различным разделам школьного курса алгебры и начал анализа.

**Линейные уравнения с модулем**

**Пример 1.**

Найти все значения параметра а, при которых уравнение

5|x – 3a| + |x – a2| + 4x = a

1. Имеет бесконечное множество решений;
2. Не имеет решений.

**Решение:**

Исходное уравнение можно заменить совокупностью четырёх систем:

1. $\left\{\begin{array}{c}5\left(x-3a\right)+ \left(x-a^{2}\right)+ 4a=a\\x\geq 3a\\x\geq a^{2}\end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{c}5\left(3a-x\right)+ \left(x- a^{2}\right)+ 4x=a\\x\leq 3a\\x\geq a^{2}\end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{c}5\left(x-3a\right)+ \left(a^{2}-x\right)+ 4x=a\\x\geq 3a\\x\leq a^{2}\end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{c}5\left(3a-x\right)+ \left(a^{2}-x\right)+ 4x=a\\x\leq 3a\\x\leq a^{2}\end{array}\right.$

– Преобразуем систему 1):

$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{1}{10}\left(a^{2}+16a\right),\\\frac{1}{10}\left(a^{2}+16a\right)\geq 3a,\\\frac{1}{10}(a^{2}+16a)\geq a^{2}\end{array}\right.$ $ ⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x=\frac{a^{2}+16a}{10},\\a(a-14a)\geq 0,\\a(-9a+16)\geq 0\end{array}\right.$ $⇔$

$$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{a^{2}+16a}{10}\\a\in (-\infty ;\left.0\right]∪\left[14;+\infty )\right.\\a\in \left[0;\left.\frac{16}{9}\right]\right.\end{array}\right.$$

Данная система совместима только при a=0. При этом также х=0

– Система 2) равносильна следующей системе:

$\left\{\begin{array}{c}14a-a^{2}=0,\\x\leq 3a,\\x\geq a^{2}\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}\genfrac{}{}{0pt}{}{a=0}{a=14},\\x\leq 3a\\x\geq a^{2},\end{array}\right.,$

И она разрешима тоже лишь для а=0. Её единственное решение х=0.

– система 3) сводится к системе

$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{1 }{8}\left(16a-a^{2}\right),\\\frac{1}{8}\left(16a-a^{2}\right)\geq 3a,\\\frac{1}{8}(16a-a^{2})\leq a^{2}\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x=\frac{16a-a^{2}}{8},\\a\left(a+8\right)\leq 0,\\a(9a-16)\geq 0\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x=\frac{16a-a^{2}}{8},\\a\in \left[-8;0\right],\\a\in \left(-\infty ;\left.0\right]∪\left[\frac{16 }{9};\left.+\infty \right).\right.\right.\end{array}\right.$

Два последних её неравенства имеют общее множество решений

 -8 $\leq $а$\leq $0.

Для каждого а из этого отрезка первое уравнение даёт единственное значение х. Наконец система 4) принимает вид:

$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{a^{2}+14a}{2},\\\frac{a^{2}+14a}{2}\leq 3a,\\\frac{a^{2}+14a}{2}\leq a^{2}\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x=\frac{a^{2}+14a}{2},\\a(a+8)\leq 0,\\a(-a+14)\leq 0\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}x=\frac{a^{2}+14a}{2},\\a\in \left[-8;0\right],\\a\in \left(-\infty ;\left.0\right]∪\left[14;+\infty ).\right.\right.\end{array}\right.$

Два последних неравенства также имеют общее множество решений

 -8$ \leq а\leq 0$

При каждом значении а из первого уравнения необходимо единственное значение х.

**Подведём итоги:** При а$<-8$ и при а$>0$ ни одна из систем не имеют решений и исходное уравнение тоже не имеет решений. При -8$\leq а<0$ имеют решения системы 3) и 4), а при а = 0 имеют решение все системы 1)–4). Но множество решений каждой из систем, при фиксированном, а$\in \left[-8;0\right]$ конечное, поэтому исходное уравнение не может иметь бесконечного множества решений ни при каком значении а.

**Ответ:** 1. Уравнение не имеет бесконечного множества решений ни при каком значении а. 2. При а$\in \left(-\infty ; -8\right)∪(0;+\infty )$ уравнение не имеет решений.

**Квадратичные неравенства**

**Пример 2.**

При каких значениях параметра множеством решений неравенства

$x^{2}+ax-1<0$ будет интервал длины 5?

**Решение:**

1. Следует заметить, что при любых значениях параметра $a$ дискриминант неравенства $ x^{2}+ax-1<0$ положителен.
2. Пусть х1 и х2 – корни квадратного трёхчлена$ x^{2}+ax-1$, а по условию должно иметь место равенство $\left|x\_{1}-\left.x\_{2}\right|\right.$ = 5.
3. Имеем: $\left|x\_{1}-\left.x\_{2}\right|\right.$ = $\sqrt{(x\_{1}-x\_{2})^{2}}$ = $\sqrt{(x\_{1}+x\_{2})^{2}-4x\_{1}x\_{2.}}$
4. Применяя теорему Виета, получим:

$\left|x\_{1}-\left.x\_{2}\right|\right.$ = $\sqrt{(x\_{1}+x\_{2})^{2}-4x\_{1}x\_{2}}$ = $\sqrt{a^{2}+4.}$

Тогда $\sqrt{a^{2}+4}$ = 5, откуда $ a^{2}=21$ или $\left|a\right|=\sqrt{21.}$

**Ответ:** $a=\sqrt{21} или a=-\sqrt{21}$.

**Показательные неравенства.**

Решение простейших показательных неравенств основано на свойстве монотонности степени:

$\left\{\begin{array}{c}a^{f(x)}>a^{g(x)}\\a>1\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}f(x)>g(x)\\a>1\end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}a^{f(x)}>a^{g(x)}\\0<a<1\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}f(x)<g(x)\\0<a<1\end{array}\right.$

Неравенство вида f($a^{x})>0$ при помощи замены переменной t=$a^{x}$ сводится к решению системы неравенств $\left\{\begin{array}{c}f(t)>0\\t>0\end{array}\right.$, а затем к решению простейших показательных неравенств.

При решении нестрогого неравенства необходимо к множеству решений строгого неравенства присоединить корни соответствующего уравнения. Как и при решении уравнений во всех примерах, содержащих выражение $a^{f(x)}$, полагаем а$>0$. Случай а=1 рассматриваем отдельно.

**Пример 3.**

 Решить неравенство

$9^{x+1}+8a3^{x}-a^{2}>0$.

**Решение:**

После замены переменной $3^{x}=t>0$ придём к квадратному неравенству 9t2 + 8at – a2$>$0 $⇔$ (9t – a)(t + a)$>0$.

Рассмотрим три случая:

1. a$ <0$. Так как 9t – a $>0,$ то решение неравенства t$>-a⇔3^{x}>-a⇔x>log\_{3}(-a)$.
2. a$>0.$ В этом случае t+a$>0,$ поэтому решение неравенства 9t$>a⇔ 3^{x}>\frac{a}{9}$, откуда x$>log\_{3}a-2.$
3. При а = 0 первоначальное неравенство принимает вид $9^{x+1}>0,$ решением его является любое значение x$\in R.$

***Ответ:***

X$\in (-log\_{3}\left(-a\right);+\infty )$ при а$<0;x\in R$ при а = 0; х$ \in (log\_{3}а-2;+\infty )$ при а $>0.$

**Тригонометрические уравнения**

**Пример 4.**

Найти целые значения а, при которых данное уравнение имеет решения:

$\cos(ax=1+2cos)$2($\frac{π}{4}+\frac{x}{2}).$

**Решение:**

 Так как $\cos(ax\leq 1, a 1+2)$cos2($\frac{π}{4}+\frac{x}{2}$)$\geq 1,$ то равенство возможно только в том случае, когда левая и правая части уравнения порознь равны 1. Решая систему

$\left\{\begin{array}{c} cosax=1\\1+2cos^{2}\left(\frac{π}{4}+\frac{x}{2}\right)=1\end{array}\right. ⇔$ $\left\{ \begin{array}{c}ax=2πk, k\in Z\\x=\frac{π}{2}+2πn,n\in Z\end{array}\right.$

И, исключая х, получим а =$ \frac{4k}{4n+1}$ .

Числа 4 и 4n+1 взаимно простые, поэтому а будет целым числом только при условии k = m(4n + 1), m$ \in $Z, откуда $a=4m.$

**Ответ:** $ a=4m, m\in Z$

**Логарифмические уравнения и неравенства**

При решении логарифмических уравнений и неравенств используются некоторые эквивалентности.

1. Уравнение $log\_{f(x)}g\left(x\right)=log\_{f(x)}h(x)$ равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{c}g\left(x\right)=h(x)\\f\left(x\right)>0,f(x)\ne 1,g(x)>0\end{array}\right.$$

В частности, если $a>0,a\ne 1,$то

$log\_{a}g\left(x\right)=log\_{a}h\left(x\right)$ $ ⇔$ $\left\{\begin{array}{c}g\left(x\right)=h(x)\\g(x)>0\end{array}\right.$

1. Уравнение $log\_{a}g\left(x\right)=b⇔g\left(x\right)=a^{b}(a>0,a\ne 1,g(x)>0)$.
2. Неравенство $log\_{f(x)}g(x)\leq log\_{f(x)}h(x)$ равносильно совокупности двух систем:

 $\left\{\begin{array}{c}0<f(x)<1\\h(x)>0\\h(x)\leq g(x)\end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}f(x)>1\\g(x)>0\\g(x)\leq h(x)\end{array}\right.$

1. Если $a, b-числа,a>0,a\ne 1, то $

$$log\_{a}f\left(x\right)\leq b⇔\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)\geq a^{b},0<a<1\\0<f\left(x\right)\leq a^{b},a>1\end{array}\right.$$

$$ log\_{a}f(x)>b⇔\left\{\begin{array}{c}0<f\left(x\right)<a^{b},0<a<1\\f\left(x\right)>a^{b},a>1\end{array}\right.$$

**Пример 5.**

Решить уравнение:

$$log\_{5}(2-\left|x-\left.a\right|\right.)+log\_{0,2}\left(5-x\right)=0.$$

**Решение:**

Перейдём к основанию 5, получим

 $log\_{5}(2-\left|x-\left.a\right|\right.+log\_{0,2}\left(5-x\right)=0$ $⇔$ $log\_{5}(2-\left|x-\left.a\right|)-\right.log\_{5}\left(5-x\right)=0$

$⇔\left\{\begin{array}{c}2-\left|x-\left.a\right|=5-x\right.\\5-x>0\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}\left|x-\left.a\right|=x-3\right.\\x<5\end{array}\right.$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}(x-2)^{2}=(x-3)^{2}\\3\leq x<5\end{array}\right.$ $ $

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}2x\left(a-3\right)=a^{2}-9\\3\leq x<5\end{array}\right.$ При $α=3$ множество решений уравнения – промежуток $\left⟦3;\left.5\right)\right..$ При $α\ne 3 х=\frac{1}{2}\left(α+3\right).$ Решая неравенство

$3\leq \frac{1}{2}(α+3)<5,$ получим $3\leq α<7.$

**Ответ:**

$х\in \left[3;\left.5\right)\right. $ при $α=3;$ $х=\frac{1}{2}\left(α+3\right), при α\in \left(3;\left.7\right)\right.; ∅ при α\in \left(-\infty ;\left.3\right)\right.∪\left[7;\left.+\infty \right)\right.$.

**Пример 6**

При каких значениях параметра $a$ неравенство

$log\_{a}\left(x^{2}+ax+1\right)>-1 $выполняется для любого $ x<0$?

**Решение:**

Исходное неравенство равносильно неравенству

$$x^{2}+ax+1>\frac{1}{2 } ⇔ x^{2}+ax+\frac{1}{2}>0. $$

Задача свелась к нахождению значений параметра, при которых квадратный трёхчлен $ f\left(x\right)=x^{2}+ax+\frac{1}{2} $ принимает положительные значения при любом $х<0. $Значения параметра можно найти из условия

$\left⟦\begin{array}{c}D<0\\\left\{\begin{array}{c}x\_{0}\geq 0\\f\left(0\right)\geq 0\end{array}\right.\end{array}\right.$ $⇔$ $\left⟦\begin{array}{c}a^{2}-2<0\\\left\{\begin{array}{c}-\frac{a}{2}\geq 0\\\frac{1}{2}\geq 0\end{array}\right.\end{array}\right.$ $⇔\left⟦\begin{array}{c}-\sqrt{2 }<a<\sqrt{2}\\a\leq 0\end{array}\right.$ $⇒$ $a\in (-\infty ; \sqrt{2}$ ).

**Ответ:** $a\in (-\infty ;\sqrt{2}$).